Automorphismes de $K(X)$.

Rémi Lajugie

Soit k un corps, donc commutatif.

Théorème 1 *Les automorphismes d'algèbres de $K(X)$ sont exactement les applications :*

$$G \mapsto G \circ F,$$

où F est telle que $\exists a, b, c, d \in k, ad - bc \neq 0$.

Preuve :

Etape 1 : montrons qu'un tel automorphisme est de la forme $G \mapsto G \circ F$. Considérons Φ un tel automorphisme. Posons $F = \Phi(X)$. Alors $\forall k \in \mathbb{N}, \Phi(X^k) = \Phi(X)^k = F^k$ et par propriété de morphisme d'algèbre il vient que, si on écrit $G = \frac{\sum_{i=1}^p a_i X^i}{\sum_{i=1}^q b_i X^i}$, $\Phi(G) = \frac{\sum_{i=1}^p a_i \Phi(X)^i}{\sum_{i=1}^q b_i \Phi(X)^i}$.

Pour la suite on pose, $\Phi(X) = \frac{A}{B}$ avec $A \wedge B = 1$. *Etape 2 : on va montrer que G est le quotient de deux polynômes de degré 1.*

Par surjectivité du morphisme, il existe $F = \frac{P}{Q}, \Phi(F) = X$, avec $P \wedge Q = 1, deg(P) = p, deg(Q) = q$. On pose $m = \max(p, q)$ Alors il vient que :

$$X(\sum_{i=1}^q b_i A^i B^{m-i}) = \sum_{i=1}^p a_i A^i B^{m-i}.$$

On en déduit alors, pour des raisons de degré, que cette égalité polynomiale implique que A est de degré 1 au plus. En ce qui concerne B, il faut distinguer les cas :

1. Si $m = p = q$, on a $B | b_q X A^m - a_p A^m$ et on conclue comme précédemment car $A \wedge B = 1$.
2. Si $m = p > q$, cette fois on a $B | b_q X$.
3. Si $m = q > p$, cette fois B.

Ainsi $\Phi(X) = \frac{aX+b}{cX+d}$. Comme Φ est surjective, on a forcément $ad - bc \neq 0$.

Etape 3 : On conclue

On remarque que si $\Phi_{a,b,c,d} = \frac{aX+b}{cX+d}, \Phi_{a',b',c',d'} = \frac{a'X+b'}{c'X+d'}$ vérifient, $ad - bc \neq 0, a'd' - b'c' \neq 0$, alors $\Phi_{a,b,c,d} \circ \Phi_{a',b',c',d'} = \Phi_{a'',b'',c'',d''}$ où a'', b'', c'', d'' sont tels que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}.$$

la condition sur le déterminant des matrices nous garantit le fait que $\Phi_{a,b,c,d}$ est inversible.

Références

— Francinou/Gianella/Nicolas. algèbre tome 1.