Le théorème des invariants de similitude.

Rémi Lajugie

Soit $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle :

$$\mathrm{E}Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t), t \in I.$$

Théorème 1 *On considère l'équation (E) soumise aux conditions de Cauchy $Y(t_0) = y_0$, on suppose que A et B sont continues. Alors ce problème de Cauchy admet une et une seule solution définie sur I entier et telle que $Y(t_0) = y_0$.*

Preuve :

Ecrivons l'équation sous forme intégrale. On veut

$$Y(t) = y_0 + \int [t_0, t] A(t)Y(t) + B(t)dt.$$

Etape 1 : I est un intervalle compact contenant t_0.

L'application $F : Y \mapsto y_0 + \int [t_0, t] A(t)Y(t) + B(t)dt$, est une application continue De plus, par compacité, $\exists \alpha, \beta, \|B(t)\| \leq \beta, \|A(t)\| \leq \alpha$.

On définit alors une suite de fonctions $Y_n = F(Y_n)$. Montrons alors par récurrence que $\|Y_{n+1}(t) - Y_n(y)\| \leq (\alpha\|y_0\| + \beta)\frac{\alpha^{n-1}|t-t_0|^n}{n!}$.

Vrai au rang 1.

Si c'est vrai au rang k alors on écrit

$$\|Y_{k+1}(t) - Y_k(y)\| \leq \int_{t_0}^{t} |Y_k(t) - Y_{k-1}(t)|dt \leq \int_{t_0}^{t} \alpha^n |t - t_0|^n/(n!).$$

Ainsi l'application F, de l'espace complet des fonctions continues sur I dans lui-même admet une itérée contractante car $n!$ croit plus vite que L^n où L est la longueur de l'intervalle. Ainsi elle admet un unique point fixe qui est donc solution de l'équation différentielle. *Etape 2 : I est un intervalle quelconque.*

On écrit alors I comme réunion croissante d'intervalles compact. Sur chacun de ces intervalles on a existence et unicité de la solution au problème de Cauchy. On conclue alors en remarquant que si I et J sont deux intervalles compacts $I \subset J$ les solutions coincident sur I.

Références

- Pommellet.
- Rouvière.