Le théorème central limite.

Rémi Lajugie

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi μ et de carré sommable, que l'on suppose centrées et réduites (donc dans ce cas $\mathbb{E}[X^2] = 1$). On note $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

On rappelle que la transformée de Fourier de la gaussienne centrée réduite est $f : t \mapsto \exp(-t^2/2)$.

Dans la suite du document, on notera ϕ_Y la transformée de Fourier d'une variable aléatoire Y.

Théorème 1 *On a $\sqrt{n}S_n$ qui converge en loi vers une loi normale centrée réduite.*

Preuve

On aura besoin des deux lemmes suivants que nous énonçons comme proposition et que nous démontrerons par la suite.

Proposition 1 *Soit $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, alors* $\exp(ix) \leq \min(\frac{2x^n}{n!}, \frac{x^{n+1}}{(n+1)!})$.

Proposition 2 *Soit $x_1, \dots, x_n$, $y_1, \dots, y_n$ des complexes de module* 1. *Alors* $|x_1 \dots x_n - y_1 \dots y_n| \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$.

Etape 1 : Par le théorème de Lévy, on sait qu'il suffit de vérifier que $\forall t, \lim_{n\to+\infty} \phi_{\sqrt{Y}S_n}(t) = \exp(-t^2/2)$.
Or, on a $\phi_{\sqrt{n}S_n}(t) = \phi_X(t/\sqrt{n})^n$, par hypothèse d'indépendance et d'identique distribution.

On fixe $t \in \mathbb{R}$. *Etape 2 :*

On a $\forall X$

$$\begin{aligned}
\exp(i\frac{tX}{\sqrt{n}}) - (1 - \frac{(tX)^2}{n}) &\leq \min(t^2X^2/n, t^3|X|^3/n^{3/2})\text{par la première prop} && (1)\\
& && (2)
\end{aligned}$$

Or, par Jensen,

$$|\mathbb{E}[\exp(i\frac{tX}{\sqrt{n}}) - (1 + \frac{(tX)^2}{n})]| \leq \mathbb{E}[|\exp(i\frac{tX}{\sqrt{n}}) - (1 + \frac{(tX)^2}{n})|] \leq \mathbb{E}[\min(t^2X^2/n, t^3|X|^3/n^{3/2})].$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\|\phi_X(t/\sqrt{n})^n - (1 - \frac{(tX)^2}{n})^n\| &\leq \sum_{i=1}^n \|\phi_X(t/\sqrt{n}) - (1 - \frac{(tX)^2}{n})\|\text{Par la seconde proposition} && (3)\\
&\leq \mathbb{E}[\min(t^2X^2, t^3|X|^3/n^{1/2})]. && (4)
\end{aligned}$$

Par convergence dominée, on en déduit donc que $\|\phi_X(t/\sqrt{n})^n - (1 - \frac{(tX)^2}{n})^n\|$ tend vers 0.

D'autre part, il est bien connu que $(1 - \frac{(tX)^2}{n})^n$ tend vers $\exp(-t^2/2)$.

Preuve des propositions :

Seconde proposition : Par récurrence immédiate en remarquant que $x_1 \dots x_n - y_1 \dots y_n = (x_1 - y_1)(x_2 \dots x_n) + y_1(x_2 \dots x_n - y_2 \dots y_n)$.

Première proposition :

On écrit la formule de Taylor avec reste intégral pour $\exp(ix)$ en 0 :

$$\exp(ix) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(ix)^k}{k!} + \frac{i^{n+1}}{n!} \int_0^x t^n \exp(it) dt.$$

On a alors en majorant $|\exp(it)|$ par un :

$$|\exp(ix) - \sum_{i=1}^{n} \frac{(ix)^k}{k!}| \leq \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

D'autre part, cette même formule à l'ordre $n-1$ donne

$$\exp(ix) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(ix)^k}{k!} + \frac{i^n}{(n-1)!} \int_0^x t^{n-1}(\exp(it) - 1) dt + \frac{i^n}{(n)!} x^n.$$

D'où :

$$|\exp(ix) - \sum_{i=1}^{n} \frac{(ix)^k}{k!}| \leq \frac{2}{(n)!} x^n.$$

Références

— Billingsley.

— Ouvrard.