Décomposition polaire.

Rémi Lajugie

Théorème 1

$$f: \quad O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++} \to GLn(\mathbb{R}) \tag{1}$$
$$(O, S) \mapsto OS, \tag{2}$$

est un homéomorphisme.

Preuve :

f est continue.

Montrons que f est surjective :

Soit $A \in GLn(\mathbb{R})$, $A^\top A \in S_n^{++}$. A admet une unique racine carrée matricielle $S = \sqrt{A}$. On montre alors que AS^{-1} est une matrice orthogonale.

Montrons que f est injective :

Supposons que l'on ait deux décompositions polaires. $O\sqrt{A} = O'S'$.

Remarquons que $S'^2 = A$. Soit P interpolateur de Lagrange qui envoie les valeurs propres de A sur celles de S. Alors on a $S = P(A) = P(S'^2)$ donc S commute avec S' et ces deux matrices sont donc co diagonalisables et on obtient $OO' = SS'$ avec S et S' qui commutent et sont symétriques donc OO' est symétrique définie positive. C'est donc l'identité.

Montrons que l'inverse de f, f^{-1} est continue.

Soit une suite $(O_1, S_1) \dots (O_n, S_n)$ telle que $(O_i S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge vers H. Par compacité du groupe orthogonal, on peut supposer que la suite des O_i converge. D'autre part, les $(O_i S_i)$ sont bornés donc les valeurs propres de S_i le sont également [1]. $H = OS$ par décomposition polaire. Comme les S_i sont bornés, on peut supposer qu'ils convergent dans S_n^+ ensemble (fermé) des matrices positives.

Références

— H2G2.

1. Si les valeurs propres des S_i n'étaient pas bornées, alors la norme triple associée à la norme euclidienne des S_i tendrait vers l'infini car le rayon spectral est plus petit que la norme et a fortiori, la norme des $O_i S_i$ tendrait vers l'infini et la suite ne pourrait converger.