Densité des polynômes orthogonaux.

Rémi Lajugie

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Les fonctions considérées sont toutes à valeurs réelles.

Définition 1 *On appelle fonction de poids, une fonction ρ telle que $\forall x \in I, \rho(x) > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \rho(x)x^{2n} \in L_1(I)$.*

Définition 2 *On note $L_2(I, \rho)$ l'espace des fonction telles que $\int_I f^2 \rho$ existe. L'espace $L_2(I, \rho)$ est un espace de Hilbert.*

Théorème 1 *Si il existe $\alpha > 0$ telle que la fonction de poids satisfasse à $\int_I \rho \exp(-\alpha|x|)dx < +\infty$, alors les polynômes orthogonaux $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, obtenus par le procédé de Gram Schmidt forment une base Hilbertienne de $L_2(I, \rho)$.*

Preuve :

Considérons f dans l'orthogonal de $Vect(a_i), i \in \mathbb{N}$ et vérifions qu'elle est nulle.

Assertion : $f\rho \in L_1$. Cela est vrai car on a $|f(x)\rho(x)| \leq \rho(x)|f(x)^2 + 1|$.

Etape 1 : La fonction $f\rho$ a une transformée de Fourier $\hat{f}$ holomorphe sur la bande $-a < Im(a) < a$. En effet, introduisons la fonction $\int_I f(t)\rho(t)\exp(izt)dt$, elle est dominée sur la bande en question par une fonction intégrable, à t fixé, la fonction est holomorphe sur la bande, et à z fixé, elle est intégrable.

Etape 2 : Nullité de $\hat{f}$

Comme cette transformée de Fourier est holomorphe au voisinage de 1, elle est analytique autour de 1 et on peut la développer en série entière et les coefficients sont données par $a_k = \int_I \rho(t)f(t)x^t$ qui est nul par hypothèse sur f.

Etape 3 : Nullité de f $f\rho$ a une transformée de Fourier nulle donc, par injectivité de la transformée de Fourier, elle est nulle. Comme $\rho(x) > 0$, on en déduit que $\forall x, f(x) = 0$, les égalités étant presque sûres.

Références

— Willem.
— Gasquet et Wittomski.