Ellipse de Steiner.

Rémi Lajugie

Proposition 1 *Le groupe affine agit transitivement sur les repères affines.*

Preuve : Soit $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ et $(O', \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{0J})$ deux repères affines. Alors la partie translation d'une telle affinité est nécessairement $\overrightarrow{OO'}$, et la partie linéaire est définie (et ce, de manière unique) par $g(\overrightarrow{OI}) = \overrightarrow{O'I'}$ et $g(\overrightarrow{OJ}) = \overrightarrow{O'J'}$. On a ainsi défini un élément du groupe affine qui convient.

Remarque : cette action est simple.

Théorème 1 *Soit ABC un triangle non aplati, alors il existe une unique ellipse tritangente aux côtés en leur milieu.*

Preuve :

Existence : Vu la proposition, il existe une affinité g qui envoie ABC sur un triangle équilatéral. Or, bissectrices et hauteurs sont confondues dans un tel triangle, et le cercle inscrit convient. L'image de ce cercle par g^{-1} est

1. tangente en leurs milieux aux côtés de ABC car ABC est équilatéral et g^{-1} différentiable,
2. une conique compacte car g^{-1} est continue donc une ellipse.

Ainsi on a établi l'existence.

Unicité :

Il suffit de la prouver pour le triangle équilatéral.

On passe en coordonnées barycentriques dans le triangle équilatéral ABC, on note $A' = (0, 1, 1)$ le milieu de $[BC]$, $B' = (1, 0, 1)$ celui de $[AC]$, $C' = (1, 1, 0)$ le milieu de $[AB]$.

Il suffit d'écrire les conditions de tangence. En A', B', C' les tangentes ont pour équation $X = 0, Y = 0, Z = 0$. En coordonnées barycentrique la tangente à une conique d'équation $P(X, Y, Z) = aX^2 + bY^2 + cZ^2 + dXY + eXZ + fYZ = 0$ a une équation $X\frac{\partial P}{\partial X} + Y\frac{\partial P}{\partial Y} + Z\frac{\partial P}{\partial Z} = 0$.

On écrit l'équation de la tangente en A', B', C' et on obtient par les conditions de tangence :

— $2b + f = 0$, $2c + f = 0$,

— $2a + d = 0, 2b + d = 0$,

— $2a + e = 0, 2c + e = 0$.

Réinjectant ce qui doit l'être, les conditions de tangence nous donnent que $a = b = c$. On élimine le cas où $a = b = c = 0$ qui aboutit à avoir tous les coefficients nuls par les conditions d'appartenance à la conique. On suppose donc que $a = b = c = 1$ [1] et les conditions d'appartenance $d = e = f = -2$.

Références

— H2G2.

1. Les coordonnées barycentriques sont définies à un scalaire près.