Equivalents de séries entières sur le bord du cercle de convergence.

Rémi Lajugie

On considère (a_n) et (b_n) deux suites à termes positifs dont les séries entières associées sont de rayon de convergence au moins un. On appelle A_n (resp B_n) la n-ème somme partielle de la série associée à (a_n) (resp (b_n))

Théorème 1 *Si* $\forall n, b_n > 0$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *diverge et si* $\frac{a_n}{b_n} \to l$*, alors* $\lim_{x\to 1^-} \frac{\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n}{\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n x^n} = l$.

Preuve :

Commençons par traduire les hypothèses de ce théorème. $\forall \epsilon > 0, \exists N_0, \forall n \geq N_0, |a_n - lb_n| \leq \epsilon b_n$.

Prouvons le résultat : Fixons $\epsilon > 0$ et N_0 tel que $\forall \epsilon > 0, \exists N_0, \forall n \geq N_0, |a_n - lb_n| \leq \epsilon b_n$. On a :

$$\begin{aligned}
|\frac{\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n - l\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n x^n}{\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n x^n}| &\leq |\frac{\sum_{n=0}^{N_0} a_n x^n - l\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n x^n}{\sum_{n=0}^{N_0} b_n x^n}| + |\frac{\sum\sum_{n=N_0}^{+\infty} a_n x^n - l\sum_{n=N_0}^{+\infty} b_n x^n}{\sum_{n=N_0}^{+\infty} b_n x^n}| \\
&\leq |\frac{\sum_{n=0}^{N_0} a_n x^n - l\sum_{n=0}^{N_0} b_n x^n}{\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n x^n}| + \epsilon.
\end{aligned}$$

Or $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n x^n$ tend vers $+\infty$ en 1^-. On en déduit alors le résultat en prenant x assez proche de 1.

Théorème 2 *Si* $\forall n, b_n > 0$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *diverge et si* $\frac{A_n}{B_n} \to l$*, alors* $\lim_{x\to 1^-} \frac{\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n}{\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n x^n} = l$.

Preuve :

On remarque alors que $\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n x^n$ est le produit de Cauchy de la série géométrique et de $\sum_n a_n x^n$. De même pour B_n. Le théorème précédent nous donne alors que

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n x^n}{\sum_{n\in\mathbb{N}} B_n x^n} = l.$$

Soit encore

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(1-x)\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n x^n}{(1-x)\sum_{n\in\mathbb{N}} B_n x^n} = l.$$

Proposition 1 *Application : étude d'une série entière lacunaire. Soit* $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^{2^n}$*. Cette série est équivalente en* 1^- *à* $\frac{-ln(1-x)}{ln(2)}$.

Cette série a un rayon de convergence égal à 1. On remarque que $ln(2)A_n = \lfloor ln(n) \rfloor$. Si on introduit $b_n = \frac{1}{n}$, on a $A_n/B_n \to ln(2)$, (par la série harmonique). On obtient alors l'équivalent de l'énoncé.

Références

— Gourdon.

— Pommellet.

— Oraux X Ens Analyse 2.