Intégrale de Dirichlet.

Rémi Lajugie

On rappelle que l'intégrale de Dirichlet est définie par $I = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{sin(t)}{t} dt$.

Théorème 1 $I = \frac{\pi}{2}$.

Preuve :

Etape 1 : semi convergence de l'intégrale

On note que $\frac{sin(t)}{t}$ se prolonge par continuité en 0. Le seul problème qu'il reste est en 0. On effectue une intégration par parties pour calculer $G(X) = \int_1^X \frac{\sin(t)}{t} dt = [\frac{-\cos(t)}{t}]_1^X + \int_1^X \frac{cos(t)}{t} dt$. Cela nous garantit l'intégrabilité.

Etape 2 : on introduit la transformée de Laplace

On pose $F(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \exp(-tx) \frac{sin(x)}{x} dx$.

On applique alors le théorème de dérivation sous le signe intégrale sur $\mathbb{R}_+^*$ et on obtient que

$F'(t) = -\int_{\mathbb{R}_+} \exp(-tx) \frac{sin(x)}{x} dx$.

On passe en complexes :

$F'(t) = -Im(\int_{\mathbb{R}_+} \exp(-tx + ix) dx) = -Im(\frac{1}{i-t}) = -\frac{1}{1+t^2}$.

On en déduit que $\forall t > 0, F(t) = -arctan(t) + C$.

Or si $t \to +\infty$, $\exp(-tx)\frac{sin(x)}{x}$ tend vers 0 et est dominée par exemple par $\exp(-x)$ donc $C = \frac{\pi}{2}$.

Etape 3 : vérification de la continuité de F en 0

On a, a priori, deux impropretés. Ecrivons $F(t) = G(t) + H(t)$ avec $G(t) = \int [0, 1] \exp(-tx) \frac{sin(x)}{x} dx$ qui est continue et $H(t) = \int [1, +\infty[\exp(-tx) \frac{sin(x)}{x} dx$. Remarquons qu'en passant en complexes, on a $H(t) = Im(\int [1, +\infty[\exp((i - t)x)/x dx)$. Une intégration par parties donne $H(t) = \exp(i - t)/(i + t) + \int [1, +\infty[\exp((i - t)x)/x^2 dx$. Donc H est bien continue en 0 (car le deuxième terme est dominé).

Références

— Francinou-Gianella-Nicolas.