Méthode de Newton pour les polynômes.

Rémi Lajugie

Théorème 1 *Soit* $P(x) = \Pi_{i=1}^{r}(x - a_i)^{\alpha_i}$ *un polynôme scindé sur* $\mathbb{R}$*. Alors, si* $x_0 > a_r$ *alors la méthode de Newton converge vers* a_r*. De plus, si la racine est simple on a l'équivalent* $\frac{(x_{k+1}-a_r)}{(x_k-a_r)^2} \sim \frac{f'(a)}{2f''(a)}$*. Si la racine est multiple, on a seulement* $\frac{(x_{k+1}-a_r)}{(x_k-a_r)} \sim (1 - \frac{1}{\alpha_r})$.

Preuve : *Etape 1 : convergence de la suite définie*

Vu la définition de P, P est convexe sur $[a_r, +\infty[$ car si on applique le théorème de Rolle deux fois, on a que $P'' \geq 0$ sur $[a_r, +\infty[$. Donc P est au dessus de sa tangente. Si $x_k > a_r$, on a donc $x_{k+1} = x_k - \frac{P(x_k}{P'(x_k)}$ est solution de $T(y) = 0$ où $T(y) = x_k - y - \frac{P(x_k}{P'(x_k)}$. On a T qui est affine non constante. $T(x_k) \geq 0$, $T(a_r) \leq 0$. Donc T s'annule sur $[a_r, x_k]$. x_k est décroissante et converge forcément vers un point fixe sur $[a_r, x_0]$ de la relation de récurrence définissant la méthode de Newton donc a_r.

Etape 2 : convergence dans le cas d'une racine simple

La formule de Taylor pour les polynômes à l'ordre 2 en haut et en bas, nous donne dans ce cas :

$$x_{k+1} - a_r = x_k - a_r - \frac{P'(a_r)(x_k - a_r) + \frac{1}{2}P''(a_r)(x_k - a_r)^2 + o(x_k - a_r)^2}{P'(a_r) + P''(a_r)(x_k - a_r) + o(x_k - a_r)}.$$

Etape 3 : convergence dans le cas d'une racine multiple

La formule de Taylor pour les polynômes à l'ordre 1 en haut et en bas, nous donne dans ce cas :

$$x_{k+1} - a_r = x_k - a_r - \frac{\frac{1}{m!}P^(m)(a_r)(x_k - a_r)^k}{\frac{1}{m!}P^(m-1)(a_r)(x_k - a_r)^{k-1}} + o(x_k - a_r).$$

Le résultat en découle en deux lignes de calcul.

Fait 1 *Pour être assuré d'avoir* x_0 *assez grand, on peut prendre* $x_0 > 1 + \sum |a_i|$.

Références

— Rouvière.

— Chambert-Loir Fermigier.