La décomposition PLU.

Rémi Lajugie

Soit k un corps (donc commutatif) L'idée de la décomposition PLU est la très féconde idée de division pour régner.

Proposition 1 *Soit T une matrice de transvection triangulaire supérieure, $T = Id + E_{i,j}$ avec $i < j$. Alors multiplier une matrice A par T à droite effectue l'opération élémentaire $C_j \leftarrow C_j + C_i$.*

Théorème 1 *Soit A une matrice carrée inversible à coefficients dans k. Alors il existe un triplet P, L, U où P est une matrice de permutation, L une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonales et U triangulaire supérieure inversible telle que $A = PLU$.*

Preuve

On note T_s l'ensemble des matrices triangulaires supérieures inversibles.

Etape 1 : introduisons quelques utiles outils.

On pose $\mathcal{B} = \{G \in GLn(k), \exists U \in T_s, G = AU\}$. Pour $i \in \{1, \dots, n\}, G \in B$. On pose aussi $n_i(G)$, le nombre de zéros après le dernier terme non nul de la ligne i. On pose $\Phi : G \in \mathcal{B} \mapsto \sum_{i=1}^{n} n_i(B)$.

Soit H telle que $\Phi(H)$ soit maximal. Alors, comme $\mathcal{B}$ est composé de matrices inversibles :

1. H n'a aucune ligne nulle.
2. Deux lignes de H ne sont pas proportionnelles.

Etape 2 : $n_i(H) \neq n_j(H)$ si $i \neq j$.

Raisonnons par l'absurde. On suppose qu'il existe $i \neq j$, tel que $n_i(H) = n_j(H) \neq 0$. Sans perte de généralité (il suffit de multiplier par une matrice diagonale inversible bien choisie, ce qui ne change pas le nombre de zéros), on peut supposer $A_{j,n_j(H)} = A_{i,n_i(H)} = 1$. Comme les lignes ne sont pas proportionnelles, il existe $i_0 < n_i(H) = n_j(H)$ tel que $A_{j,i_0} \neq A_{i,i_0}$. Parmi ces deux nombres, au moins l'un des deux est donc non nul. Supposons que ce soit A_{i,i_0} qui ne soit pas nul. Alors en multipliant par la transvection (correspondant à une matrice triangulaire supérieure) qui réalise l'opération élémentaire sur les colonnes : $C_{n_i(H)} \leftarrow C_{n_i(H)} + \frac{-1}{A_{i_0,n_{i_0}}} C_{i_0}$, on obtient une matrice H' qui est dans $\mathcal{B}$ et qui vérifie $\Phi(H') > \Phi(H)$ (en gros, on a réussi à ajouter un nouveau 0 en bout de ligne).

Etape 3 : conclusion

Quitte à multiplier à droite par des dilatations, on suppose que les termes non nuls les plus à droite de chaque ligne de H sont égaux à 1. Comme $n_i(H) \neq n_j(H) \forall i \neq j$, il vient nécessairement que $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \exists! j, n_j(H) = i$. En d'autre terme il existe une permutation qui envoie (de manière univoque) un entier i sur un indice de ligne tel que $n_j(H) = i$. Appelons cette permutation σ et soit P_σ la matrice de permutation diagonale. Alors en multipliant H à gauche par l'inverse de cette matrice de permutation on obtient une matrice L triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale.

Au total :

- $H = P_\sigma L$ avec L triangulaire inférieure,
- $H = AU$ avec U triangulaire supérieure,
- donc $A = HU^{-1}$ avec U^{-1} triangulaire supérieure et par suite $A = P_\sigma L U^{-1}$, ce qui est une décomposition PLU.

Complément

Question : a-t-on unicité de ce genre de décomposition ?

La réponse est, à P fixé oui, il suffit alors d'écrire $PLU = PL'U'$ d'où $LL' = U'U$ donc LL' et $U'U$ sont diagonales et comme on impose d'avoir la diagonale de $L = 1$ on en déduit $LL' = UU' = Id$.

Mais en général, il n'y a pas unicité.

Contre exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}$$

Références

— Aucune mais qui a lu et compris la preuve de l'existence de la décomposition de Bruhat dans le tome 2 de H2G2 (au début) adaptera sans problème la preuve.