Sous groupes compacts de GLn($\mathbb{R}$).

Rémi Lajugie

Nous allons pour commencer montrer le théorème de point fixe suivant (dû à Kakutani).
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

Théorème 1 *Soit H un sous-groupe compact de $GL(E)$, K un convexe compact de E stable par H alors il existe un élément $x \in K$ tel que $\forall h \in H, h(x) = x$.*

Preuve : on introduit une norme H invariante :

$$\max_{h \in H} \|h(x)\|,$$

on vérifie immédiatement que c'est une norme. Elle est de plus strictement convexe car la norme Euclidienne est strictement convexe :

$$\|\frac{x+y}{2}\| = \|\frac{h(x)+h(y)}{2}\| < 1/2\|h(x)\| + 1/2\|h(y)\|.$$

Soit $s \in K$ de norme minimale alors par stricte convexité il est unique, or $\|h(s)\| = \|s\|, \forall h$, donc s est un point fixe de K sous H.

Théorème 2 *Tout sous-groupe compact de $GLn(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe du groupe orthogonal $On(\mathbb{R})$.*

On considère $E = S_n$ l'ensemble des matrices symétriques. $\forall g \in G, g^T g \in E$. Comme G est compact, on a $G^T G$ qui est compact dans E, son enveloppe convexe l'est aussi par le théorème de Carathéodory. Cet ensemble est stable par la famille d'application linéaires $\rho(h) : g \mapsto h^T g h$ qui forme un sous groupe compact de $GL(E)$ donc qui a un point fixe dans E, notons le k. Alors $\forall g \in G, k^T g k = g$ donc G est bien conjugué à un sous-groupe du groupe orthogonal.

Références

— Alessandri.