Note sur la résolution de l'équation de degré 3

Rémi Lajugie

13 novembre 2016

Résumé

Dans cette note, on donne la célèbre méthode, dite de Cardan-Tartaglia, pour la résolution des équations de degré 3. Ce document est issu d'une ébauche de développement d'agrégation coupé au montage mais qui rentre fort bien dans la leçon concernant les relations coefficients et racines.

Cette démonstration est fortement inspirée de celle que l'on peut trouver dans les livres, forts classiques, de Ramis, Deschamps, Odoux [Ramis et al., 2001], ou de Gozard [Gozard, 1997]. Historiquement, elle n'a pas beaucoup changé depuis sa découverte par Cardan et Tartaglia au XVIeme siècle [Cardan, 1545].

1 Préliminaires : les relations coefficients/racines

On rappelle qu'un polynôme P de degré n à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ est la donnée d'une suite finie $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ de $n+1$ éléments de $\mathbb{K}$, appelés *coefficients* du polynôme. On note généralement $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$. On s'intéresse aux relations qui existent entre racines et coefficients d'un polynôme. On dit qu'un élément $a \in K$ est une racine de P si $P(a) = 0$.

Proposition 1 *a est racine de P si, et seulement si, il existe un polynôme Q tel que $P(X) = (X-a)Q(X)$.*

Dans tout le document on considère les polynômes comme ayant des coefficients dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Nous rappelons le théorème suivant :

Théorème 1 *(d'Alembert/Gauss) Le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos. Autrement dit tout polynôme à coefficients complexes admet une racine.*

1.1 Le cas des polynômes de degré 2

On rappelle que dans le cas des polynômes de degré 2, il est possible de résoudre explicitement l'équation. Il est traditionnel de noter les polynômes de degré 2, $P(X) = aX^2 + bX + c$. On introduit le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. Les racines sont alors données par

$$x_+ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_- = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Si Δ est nul, x_+ et x_- sont bien évidemment confondues. De là et de la proposition (1) on déduit la factorisation

$$P(X) = (X - x_-)(X + x_+).$$

Un développement immédiat et l'identification des coefficient nous donne les relations suivantes :

$$\begin{aligned} x_+ + x_- &= b, \\ x_+ \times x_- &= c. \end{aligned}$$

1.2 Le cas général

Nous nous limitons au corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, même si le raisonnement est valable sur tout corps dans lequel le polynôme est scindé, c'est à dire dans tout corps contenant un corps de décomposition du polynôme considéré.

Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$ un polynôme scindé de degré n de racines (dont certaines peuvent être confondues le cas échéant) $(x_1, \ldots, x_n)$. On a alors la relation :

$P(X) = (X - x_1)\ldots(X - x_n)$.

Un développement immédiat de l'expression nous donne les relations suivantes entre coefficients et racines :

$a_{n-1} = x_1 + \ldots + x_n, -a_{n-2} = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n, \ldots a_0 = (-1)^n x_1x_2\ldots x_n$.

2 La résolution de l'équation de degré 3

La résolution de l'équation de degré 3 proposée pour la première fois par Tartaglia et Cardan repose sur deux astuces successives. On part pour le moment d'une équation du troisième degré du type :

$$x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0. \tag{1}$$

2.1 Réduction au cas simplifié

La première étape revient, par une translation à supprimer le terme en x^2 de l'équation. On pose pour cela

$$X = x + \frac{\alpha}{3}.$$

On substitue dans l'équation (1) :

$$\begin{aligned} & (X - \tfrac{\alpha}{3})^3 + \alpha(X - \tfrac{\alpha}{3})^2 + \beta(X - \tfrac{\alpha}{3}) + \gamma && = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & X^3 - 3\tfrac{\alpha^2 X}{9} + 3\tfrac{\alpha X^2}{3} + \tfrac{\alpha^3}{27}\alpha X^2 - \tfrac{2}{3}\alpha^2 X + \tfrac{\alpha^2}{9} + \beta(X - \tfrac{\alpha}{3}) + \gamma && = 0. \end{aligned}$$

On remarque que les termes en X^2 se simplifient, on peut donc considérer uniquement les équations de la forme :

$$X^3 + pX + q = 0. \tag{2}$$

2.2 Résolution dans ce cas simplifié

On part d'une équation de la forme (2)

On fait un nouveau changement de variable $X = u + v$. L'application de la formule du binôme de Newton nous donne :

$$\begin{aligned} X^3 &= (u+v)^3 \\ &= u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 \\ &= u^3 + v^3 + 3(u+v)uv \\ &= u^3 + v^3 + 3uvX. \end{aligned}$$

Soit encore, X solution de l'équation si, et seulement si,

$$X^3 - 3uvX - u^3 - v^3 = 0 = X^3 + pX + q.$$

Ainsi, en identifiant les coefficients des expressions à droite et à gauche, X est solution de l'équation (2) si, et seulement si, il admet une décomposition [1] de la forme $X = u + v$ qui satisfait à :

$$\begin{cases} -p = 3uv, \\ -q = u^3 + v^3. \end{cases}$$

En élevant au cube [2], on obtient :

$$\begin{cases} \frac{-p^3}{27} = u^3v^3, \\ -q = u^3 + v^3. \end{cases}$$

Autrement dit u^3 et v^3 sont les solutions d'une équation du degré 2 :
$Z^2 + qZ - \frac{p^3}{27}$, que l'on résout par la méthode décrite précédemment pour obtenir :

$$\begin{cases} u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \\ v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}. \end{cases}$$

Maintenant, si l'on souhaite retrouver u et v, il faut désormais reprendre la racine cubique de u^3 et v^3. On rappelle qu'un nombre complexe g a trois racines cubiques obtenues via $\sqrt[3]{g}, j\sqrt[3]{g}, j^2\sqrt[3]{g}$ où $j = \exp(\frac{-2i\pi}{3})$, [3] A priori, il y a 9 couples possibles pour u et v. Cependant la relation $-p = 3uv$ détermine complètement v une fois que l'on choisit u. Il n'y a donc que trois couples $(u; v)$ possibles. Or, comme un des corollaires du théorème de d'Alembert Gauss est de nous dire qu'une équation de degré n a très exactement n racines comptées avec multiplicité, cela nous garantit que ces trois couples nous donnent les racines (notons que dans certains cas, certaines de ces racines peuvent être égales). Ainsi, dans notre cas si on pose :

1. Cette décomposition n'est a priori pas unique.
2. Désormais, on ne raisonne plus que par condition nécessaire.
3. La notation radical signifie ici que l'on prend arbitrairement une des trois racines cubiques complexes du nombre.

$$\begin{cases} u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \\ v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \end{cases}$$

l'équation originale (2) a trois solutions :

$$X_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$
$$X_2 = j\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + j^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$
$$X_3 = j^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + j\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Ce sont ces formules que l'on appelle en général les formules de Cardan.

Références

Jérôme Cardan. *Artis Magnae*. 1545.

Yvan Gozard. *Théorie de Galois*. Ellipses Marketing, 1997.

Edmond Ramis, Claude Deschamps, and Claude Odoux. *Cours de mathématiques spéciales, tome 1, algèbre*. Dunod, 2001.